**UE104 – Architecture des systèmes**

**HAUTE ÉCOLE DE NAMUR-LIÈGE-LUXEMBOURG**

**Bloc 1**

Atelier 2 : systèmes de numération

Objectifs

* connaître les différents systèmes de numération utilisés en informatique
* savoir lire et écrire les nombres de ces systèmes
* savoir passer d'un système à l'autre

# Introduction

Dans ce document, plusieurs conventions sont utilisées le logo signifie que vous avez quelque **chose à réaliser**.

Un système de numération décrit la façon dont les nombres sont représentés. Il est défini par :

* un alphabet qui regroupe l'ensemble des symboles ou chiffres qui permettent d'écrire un nombre (= lexème),
* des règles d’écriture qui expliquent comment s'agencent ces symboles (= syntaxe)
* des règles qui définissent la signification de ces écritures correctes (= sémantique)

# Systèmes de numération utilisés en informatique

En informatique, plusieurs systèmes de numération sont utilisés. Dans le Tableau 1, ajoutez la liste des symboles correspondant à chaque système.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Système | Base | Symboles |
| Décimal | 10 | 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 |
| Binaire | 2 | 0,1 |
| Octal | 8 | 0,1,2,3,4,5,6,7 |
| Hexadécimal | 16 | 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F |

Tableau 1 - Systèmes de numération utilisés en informatique

Toute information en informatique est codée sous forme binaire afin d'être mémorisée. Il est donc nécessaire de connaître les différentes bases utilisées et de savoir comment passer d'une base à l'autre.

Il existe plusieurs notations permettant de savoir dans quelle base un nombre est exprimé. On peut, par exemple,

* préciser la base en la mettant en indice   
  Exemple : 5310
* préciser la base précédée d'un 'b' en la mettant en indice   
  Exemple : 53b10
* préciser la base entre parenthèse en la mettant en indice  
  Exemple : 53(10)

Dans ce document, c'est la première notation qui sera utilisée.

## Système décimal

Le système décimal ou système de base 10 contient 10 symboles, que vous avez notés dans le Tableau 1.

On parle de nombres décimaux dans le système décimal.

### Le rang d'un chiffre

Chaque chiffre a une valeur particulière en fonction de sa position dans le nombre.

Par exemple, si un nombre N vaut 345,6710, cela signifie que

N = 3 × 100 + 4 × 10 + 5 × 1 + 6 × 0,1 + 7 × 0,01

Ainsi

* le chiffre 5, situé au **rang** **0** à partir de la droite a une valeur de 5,
* le chiffre 4, situé au **rang** 1 a une valeur de 40, et
* le chiffre 3, situé au **rang** 2 a une valeur de 300 ;
* le chiffre 6, situé au **rang** -1 a une valeur de 0,6, et
* le chiffre 7, situé au **rang** -2 a une valeur de 0,07

D'où, on peut écrire

N = 3 × 102 + 4 × 101 + 5 × 100 + 6 × 10-1 + 7 × 10-2

Notez que le numéro associé au premier rang, celui des unités, est 0.

### Le poids d'un chiffre

Le **poids** d'un chiffre dans un nombre dépend de son **rang**. Le **poids** d'un chiffre est ce par quoi il faut le multiplier pour connaitre sa valeur, il est ainsi égal à baserang.

En base 10, dans le nombre 1**7**5, le chiffre 7 a un poids de 101.  
Sa valeur est de 7 × 101 = 70.

Le poids le plus faible, en base 10, est 100 et le poids le plus fort est 10n-1, n étant le nombre de chiffres composant le nombre.

D'où, le chiffre de **poids faible** est celui le plus à droite et le chiffre de **poids fort** est celui le plus à gauche.

En toute généralité, le poids le plus faible se trouve à droite et correspond à base0 ; l’exposant est augmenté de 1 à mesure qu'on se déplace vers la gauche.

### Avez-vous compris ?

Exprimez le nombre 2745,214 en détaillant le poids de chaque chiffre à l'aide de son rang, comme dans l'explication ci-dessus :

N = 2 \* 103 + 7 \* 102 + 4 \* 101 + 5 \* 100 + 2 \* 10-1 + 1 \* 10-2 + 4 \* 10-3

Quel est le poids du chiffre 7 ? 102

Quel est le rang du chiffre 5 ? Rang 0

## Système binaire

Le système binaire de numération ou système de base 2 ne contient que 2 symboles :

* 0 (le courant ne passe pas) et
* 1 (le courant passe).

Chaque chiffre binaire est appelé bit (Binary digIT).

On parle de nombres binaires dans le système binaire.

Dans le système binaire de numération, le nombre 1101012 désigne 5310.

En effet, tout comme dans l’écriture décimale, chaque chiffre a un poids qui est fonction de son rang.

Ainsi,

1101012 = 1 × 20 + 0 × 21 + 1 × 22 + 0 × 23 + 1 × 24 + 1 × 25

= 5310

Le nombre 11100,011012 désigne 28,4062510.   
En effet,

11100,011012 = 0 × 20 + 0 × 21 + 1 × 22 + 1 × 23 + 1 × 24   
 + 0 × 2-1 + 1 × 2-2 + 1 × 2-3 + 0 × 2-4 + 1 × 2-5

= 28,4062510

Ces techniques de conversion seront abordées plus en détail dans le chapitre suivant.

### 

### Avez-vous compris ?

Complétez le tableau suivant en écrivant les 10 chiffres de la base 10 en base 2 :

|  |  |
| --- | --- |
| Décimal | Binaire |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 10 |
| 3 | 11 |
| 4 | 100 |
| 5 | 101 |
| 16 | 110 |
| 7 | 111 |
| 8 | 1000 |
| 9 | 1001 |

En bref, comptez de 0 à 9, en l'écrivant en binaire…

## Système hexadécimal

Le système hexadécimal ou système de base 16 contient 16 chiffres :

* de 0 à 9, les chiffres existant en base 10, et
* de A à F, car au lieu d'inventer de nouveaux symboles, il a été décidé d'utiliser les 6 premières lettres de l'alphabet.

Le nombre AE2116 représente 4457710.

En effet,

AE2116 = 1 × 160 + 2 × 161 + E × 162 + A × 163

= 1 × 160 + 2 × 161 + 14 × 162 + 10 × 163

= 4457710

## Système octal

Le système octal ou système de base 8 contient 8 chiffres allant de 0 à 7.

Le nombre 5278 représente 34310.

En effet,

5278 = 5 × 82 + 2 × 81 + 7 × 80

= 34310

## Exercices

À quel(s) système(s) de numération (parmi ceux vus précédemment) appartiennent les nombres suivants ? **Barrer les systèmes qui ne conviennent pas.**

Exemple : 257 est un nombre des systèmes décimal, octal et hexadécimal.

1. 31CD : ~~binaire~~, ~~décimal~~, ~~octal~~ et hexadécimal
2. 1010 : binaire, décimal, octal et hexadécimal
3. 7815 : ~~binaire~~, décimal, ~~octal~~ et hexadécimal
4. 1021 : ~~binaire~~, décimal, octal et hexadécimal
5. 3CA2 : ~~binaire~~, ~~décimal~~, ~~octal~~ et hexadécimal
6. 2549 : ~~binaire~~, décimal, ~~octal~~ et hexadécimal

# Conversions de nombres

Ce chapitre présente les diverses manières de passer d'un système à l'autre… On parle aussi, dans le vocabulaire courant de "changement de base".

Il est à noter que pour toutes les conversions qui suivent, chaque nombre est composé de deux parties : sa partie entière et sa partie décimale (partie située après la marque décimale, une ',' en français ou un '.' en anglais). Bien sûr, si le nombre n'a pas de partie décimale, celle-ci n'est pas traitée.

## Base X 🡪 Base 10

Pour transformer un nombre exprimé dans une base quelconque vers la base 10, il suffit de multiplier chaque chiffre du nombre par son poids et d'additionner les valeurs obtenues.

101,112 = 1\*22 + 0\*21 + 1\*20 + 1\*2-1 + 1\*2-2

= 5,7510

AE2116 = A\*163 + E\*162 + 2\*161 + 1\*160

= 10\*163 + 14\*162 + 2\*161 + 1\*160

= 4457710

## Base 10 🡪 Base X

Pour transformer un nombre exprimé en base 10 vers une autre base, il faut considérer chacune des parties du nombre séparément :

* Pour la **partie entière**, on procède par des **divisions successives par la** **base** et on reporte les restes de ces divisions dans l’ordre inverse
* Pour la **partie décimale**, on procède par **multiplications successives** **par la base** et on reporte la partie entière des résultats dans l’ordre d’apparition.

### Cas simple

Soit 35,3203125 à convertir en base 2

⮱ 2 parties : la partie entière 35 et la partie décimale 0,3203125.

#### Partie entière

On procède par des divisions successives par 2 et on reporte les restes dans l’ordre inverse.

diviseur

dividende

1 2

*-0* 0

**1**

2 2

*-2* 1

**0**

4 2

*-4* 2

**0**

8 2

*-8* 4

**0**

17 2

*-16* 8

**1**

35 2

*-34* 17

**1**

On lit dans le sens inverse !

quotient

reste

On sait donc que 3510 = 1000112

#### Partie décimale

On procède par multiplications successives par 2 des parties décimales et on prend la partie entière des résultats dans l’ordre d’apparition.

0,3203125 \* 2 = **0**,640625

0,640625 \* 2 = **1**,28125

0,28125 \* 2 = **0**,5625

0,5625 \* 2 = **1**,125

0,125 \* 2 = **0**,250

0,250 \* 2 = **0**,500

0,500 \* 2 = **1**

Dès lors, 0,320312510 = 0,01010012

#### Conclusion

35,320312510 = 100011,01010012

### Cas avec récurrence

Soit 0,32510

Seule la partie décimale est à considérer.

0,325\*2 = 0,650

0,650\*2 = 1,300

0,300\*2 = 0,600

0,600\*2 = 1,200

0,200\*2 = 0,400

0,400\*2 = 0,800

Récurrence

0,800\*2 = 1,600

0,600\*2 = 1,200

0,200\*2 = …

Vous pourrez constater que la conversion peut vous entraîner « assez loin ». C‘est tout le problème de ce type de conversion. Ce sujet sera abordé dans l'atelier suivant "Codage de l'information".

0,32510 = 0,0101001100110011…2

Les exemples ci-dessus permettent de comprendre la conversion de la base décimale à la base binaire. Pour convertir en base octale ou en base hexadécimale, les processus sont identiques si ce n’est que les divisions/multiplications se font respectivement avec la base choisie (à savoir 8 ou 16).

## Base 2 🡪 Base 16

Pour passer du système binaire au système hexadécimal, on regroupe les chiffres binaires par paquet de 4, appelés quartets. On complète s’il y a lieu par des 0 non significatifs (à gauche pour la partie entière et à droite pour la partie décimale) et on écrit la correspondance hexadécimale.

Pour ce faire, il suffit de passer par la table de conversion présentée dans le Tableau 2.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Base 10 | Base 2 | Base 16 |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 10 | 2 |
| 3 | 11 | 3 |
| 4 | 100 | 4 |
| 5 | 101 | 5 |
| 6 | 110 | 6 |
| 7 | 111 | 7 |
| 8 | 1000 | 8 |
| 9 | 1001 | 9 |
| 10 | 1010 | A |
| 11 | 1011 | B |
| 12 | 1100 | C |
| 13 | 1101 | D |
| 14 | 1110 | E |
| 15 | 1111 | F |

Tableau 2 - Table de conversion

1011101,101012 = 101 1101,1010 12

= **0**101 1101,1010 1**000**2

= 5D,A816

## Base 16 🡪 Base 2

Il suffit d’écrire la correspondance binaire en traduisant chaque symbole hexadécimal selon le Tableau 2.

BAC3,B816 = 1011 1010 1100 0011,1011 10002

= 1011101011000011,101112

## Exercices

1. Convertir chaque nombre binaire suivant en décimal et en hexadécimal
   1. 10101002 5484
   2. 11001012 65 101
   3. 1000001,1112 41,E 65,875
   4. 1111000,101012

**Remarque** pour faire passer un nombre binaire en hexadécimal sans le tableau de conversion il faut former des groupes de 4 et faire exposant 1,2,4,8 sur chaque nombre binaire exemple : 18041201 = 8 + 2 = 10 => A

Si ce n’est pas possible de faire des groupes de 4 il faut rajouter des 0 derrière Exemple : 1110 PS : on commence toujours a former les groupes de 4 en partant par la droite.

1. Convertir chaque nombre hexadécimal suivant en binaire et décimal
   1. A316 10100011 163
   2. 53216 0101 0011 0010
   3. 5C816 0101 1100 1000
   4. 8E9,2D16 1000 1110 1001
2. Convertir chaque nombre décimal suivant dans les 3 autres systèmes (binaire, octal et hexadécimal)
   1. 12810
   2. 51710

Remarque : Quand on passe d’une base10 à une basex il faut lire le reste de la division de bas vers le haut pour trouver le bon résultat. Et ensuite on écrit les chiffres qu’on vient de lire du bas vers le haut de gauche à droit.

1. Vrai ou faux ? Répondez sans effectuer de conversion ! Vérifier ensuite votre réponse…
   1. 01010012 est un nombre pair ❑ Vrai ❑ Faux
   2. 10012 > 11002 ❑ Vrai ❑ Faux
   3. 11002 = 1102 \* 2 ❑ Vrai ❑ Faux
   4. F + 1D = 2C ❑ Vrai ❑ Faux
   5. 13 – F = 3 ❑ Vrai ❑ Faux

# Un peu d'arithmétique

Dans le cadre de cet atelier, seule l'addition et la soustraction sont présentées. Ces deux opérations fonctionnent exactement de la même manière quelle que soit la base dans laquelle les nombres sont exprimés, mais un exemple vaut mieux… Les autres opérations ont également un comportement similaire d'une base à l'autre, mais ne seront pas abordées ici !

## Addition de deux nombres

### En base 10

Voici un petit rappel sur l'addition de deux nombres en base 10.

*1 1 retenue positive*

1 8 9

+ 1 3

2 0 2

En effet, dès qu'on dépasse le chiffre le plus élevé de la base, ici 9, on fait un report en notant 1 au-dessus de la position suivante et on garde le surplus. Or, 9 + 3 = 12, d'où on reporte le 1 dans les dizaines et on garde le 2 dans les unités. C'est ce qu'on appelle la retenue positive.

### En base 2

Le principe est le même en base 2, à part que le chiffre le plus élevé est 1…

Les règles sont donc les suivantes :

* 02 + 02 = 02
* 02 + 12 = 12
* 12 + 02 = 12
* 12 + 12 = **12** \* 21 + 02 \* 20 = 102

*1 1 1 1 1*

1 0 1 1 1 1 0 1

+ 1 1 0 1

1 1 0 0 1 0 1 0

## Soustraction de deux nombres

### En base 10

Voici un petit rappel sur la soustraction de deux nombres en base 10.

2 *1*0 *1*0

**-** 1 3

*-1 -1*

1 8 7

En effet, comme on ne peut pas soustraire 3 de 0, on reporte une dizaine vers les unités afin de pouvoir effectuer 10 – 3 = 7. Il ne faut pas oublier de noter la retenue négative.

### En base 2

Le principe est le même à part que le chiffre le plus élevé est 1…

210 - 110 = 1

310 - 210 = 1

1 1 *1*0 *1*0 *1*1 *1*0 *1*0 *1*0

- 1 1 0 1

*-1 -1 -1 -1 -1 -1*

1 0 1 1 1 0 1 1

## Exercices

1. Effectuer les additions suivantes de nombres en base 2. Vérifier vos réponses en convertissant en base 10 !
   1. 1111101 + 110111 = 1011 0100
   2. 101011 + 10110011 = 1101 1110
2. Effectuer les soustractions suivantes de nombres en base 2. Vérifier vos réponses en convertissant en base 10 !
   1. 101101 - 11011
   2. 10100000011 – 1111000

Remarque : Demander des explications sur la soustraction de nombre binaire